

ZALOMENÉ A ZAKRIVENÉ NOSNÍKY, RÁMY

V technickej praxi tvoria rámové konštrukcie dôležitú súčasť strojných aj stavebných celkov. Najčastejšie ide o nosné časti, ktoré treba pevnostne navrhnuť, t. j. nadimenzovať priečne rozmery [7, 42, 48]. V tejto kapitole sú pevnostné výpočty zamerané na problémy rovinného ohybu zalomených, zakrivených a rámových konštrukcií.

1 Zalomené nosníky a rámy

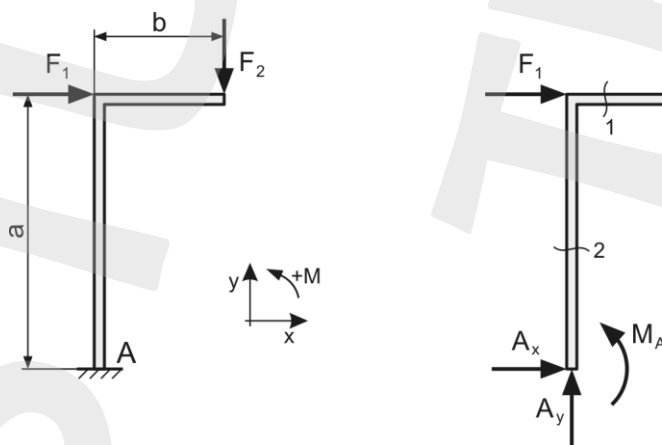
Pod zalomenou (lomenou) rámovou konštrukciou sa rozumie sústava tuho spojených priamych nosníkov. Tieto sú navzájom spojené pod rôznymi uhlami a predpokladá sa, že pri pretvorení konštrukcie nedôjde k zmene týchto uhlov. Lomené rámy sa delia na sústavy, v ktorých spojnice ťažísk priečných rezov nie je uzatvorená (lomené nosníky a otvorené rámy) a sústavy, v ktorých je uzatvorená (rám).

Príslušné reakcie vo väzbách sa získajú zo statických rovníc rovnováhy a vnútorné silové veličiny sa určia metódou rezu. V prípade staticky neurčitých úloh sa využijú doplnujúce rovnice (deformačné podmienky, resp. Castiglianove vety). Vo výpočtoch sa budú využívať postupy a vzťahy, ktoré boli prezentované v predchádzajúcich kapitolách pre jednotlivé typy zaťaženia (ťah-tlak, ohyb a pod.). Na riešenie posunutí bodov vyšetrovanej sústavy sa využije znalosť 1. Castiglianovej vety.

Riešené príklady (zalomené nosníky a rámy)

Príklad č. 1

Vypočítajte reakcie vo väzbách, veľkosť vnútorných silových účinkov a nakreslite ich priebehy pre pravouhlý rovinný rám na obr. 1 vľavo. Dané veličiny: $a = 1,2$ m, $b = 0,4$ m, $F_1 = 4000$ N, $F_2 = 3000$ N.



Obr. 1 Pravouhlý rovinný rám

Riešenie:

Na úvod sa vykoná kontrola statickej určitosti:

$$n = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{pravouhlý rám je staticky určitý.}$$

Rám sa uvoľní, väzby sa nahradia myslennými reakciami. Na jednotlivých úsekoch sa zvolia myslené rezy kvôli zisteniu vnútorných silových účinkov (obr. 1 vpravo).

Reakcie vo väzbách sa vypočítajú na základe statických rovníc rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + F_1 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_2 = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad M_A - F_1 \cdot a - F_2 \cdot b = 0.$$

Z toho

$$A_x = -F_1 = -4000 \text{ N},$$

$$A_y = F_2 = 3000 \text{ N},$$

$$M_A = F_1 \cdot a + F_2 \cdot b = 4000 \cdot 1,2 + 3000 \cdot 0,4 = 6000 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

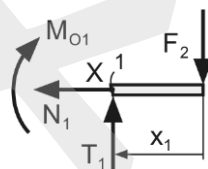
Nasleduje riešenie vnútorných silových účinkov:

1. rez:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_1 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad T_1 = F_2 = 3000 \text{ N},$$

$$\sum M_{iX} = 0: \quad M_{O1} = -F_2 \cdot x_1.$$



Hranice intervalu x_1 sú v rozsahu $0 \leq x_1 \leq b$, potom po dosadení

$$M_{O1}(x_1 = 0) = -F_2 \cdot 0 = 0,$$

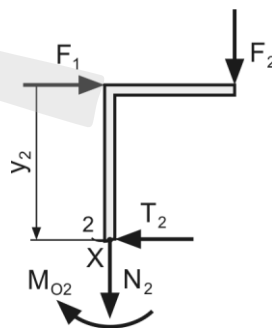
$$M_{O1}(x_1 = b) = -F_2 \cdot b = -3000 \cdot 0,4 = -1200 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2. rez:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad T_2 = F_1 = 4000 \text{ N},$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_2 = -F_2 = -3000 \text{ N},$$

$$\sum M_{iX} = 0: \quad M_{O2} = -F_1 \cdot y_2 - F_2 \cdot b.$$

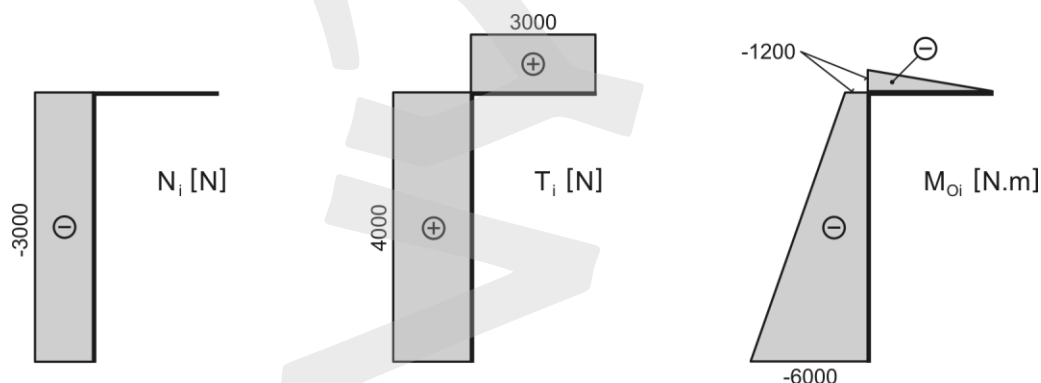


Hranice intervalu y_2 sú v rozsahu $0 \leq y_2 \leq a$, potom

$$M_{O2}(y_2 = 0) = -F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot b = -F_2 \cdot b = -1200 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$M_{O2}(y_2 = a) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot b = -4000 \cdot 1,2 - 3000 \cdot 0,4 = -6000 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

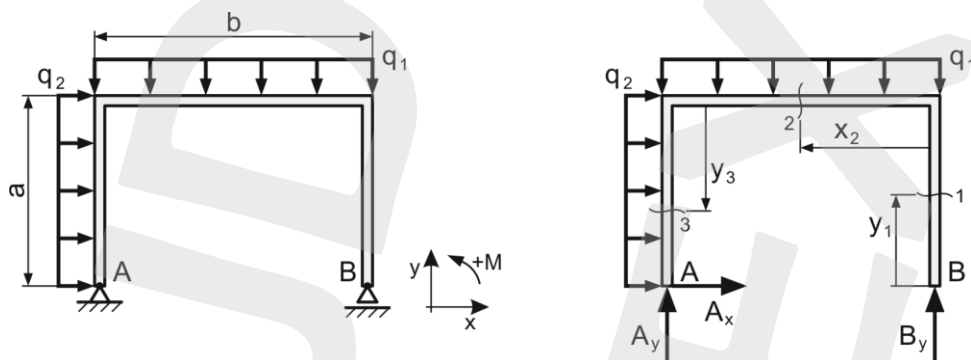
Priebehy vnútorných silových veličín sú znázornené na obrázku 2.



Obr. 2 Priebehy vnútorných silových veličín

Príklad č. 2

Určte priebeh ohybových momentov, priečných a normálových síl v lomenom nosníku na obrázku 3. Ďalej vypočítajte polohu a hodnotu maximálneho ohybového momentu, ak sú dané rozmery $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $q_1 = 5000 \text{ N/m}$ a $q_2 = 2000 \text{ N/m}$.



Obr. 3 Lomený nosník zaťažný spojitým zaťažením

Riešenie:

Nosník je staticky určitý. Musí sa uvoľniť, zavedú sa reakcie vo väzbách (obr. 3 vpravo) a zo statických rovníc rovnováhy ich vypočítať.

Statické rovnice rovnováhy majú tvar

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + q_2 \cdot a = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B_y \cdot b - \frac{q_1 \cdot b^2}{2} - \frac{q_2 \cdot a^2}{2} = 0,$$

$$\sum M_{iB} = 0: \quad -A_y \cdot b + \frac{q_1 \cdot b^2}{2} - \frac{q_2 \cdot a^2}{2} = 0.$$

Z nich sa určia reakcie

$$A_x = -q_2 \cdot a = -6000 \text{ N},$$

$$A_y = \frac{q_1 \cdot b^2 - q_2 \cdot a^2}{2b} = 7750 \text{ N},$$

$$B_y = \frac{q_1 \cdot b^2 + q_2 \cdot a^2}{2b} = 12250 \text{ N}.$$

Matematické vyjadrenie priebehov ohybových momentov M_{O_i} , priečných a normálových síl T_i a N_i sa vykoná metódou mysleného rezu v smere proti pohybu hodinových ručičiek:

1. **rez**, $0 \leq y_1 \leq a$:

$$T_1 = 0,$$

$$N_1 = -B_y = -12250 \text{ N},$$

$$M_{O1} = 0.$$

2. **rez**, $0 \leq x_2 \leq b$:

$$T_2 = -B_y + q_1 \cdot x_2 = -12250 + 5000 \cdot x_2, \quad N_2 = 0,$$

$$M_{O2} = B_y \cdot x_2 - q_1 \cdot \frac{x_2^2}{2} = 12250 \cdot x_2 - 2500 \cdot x_2^2.$$

3. **rez**, $0 \leq y_3 \leq a$:

$$T_3 = q_2 \cdot y_3 = 2000 \cdot y_3,$$

$$N_3 = B_y - q_1 \cdot b = -7750 \text{ N},$$

$$M_{O3} = B_y \cdot b - q_1 \cdot \frac{b^2}{2} - q_2 \cdot \frac{y_3^2}{2} = 9000 - 1000 \cdot y_3^2.$$

Z priebehov ohybových momentov a priečných síl možno určiť extrém funkcie v druhom poli. Extrém funkcie ohybového momentu sa vypočíta z predpokladu, že hodnota priečnej sily v tomto bode je nulová. Poloha extrém sa vypočíta zo vzťahu

$$T_2 = -12250 + 5000 \cdot x_{2E} = 0,$$

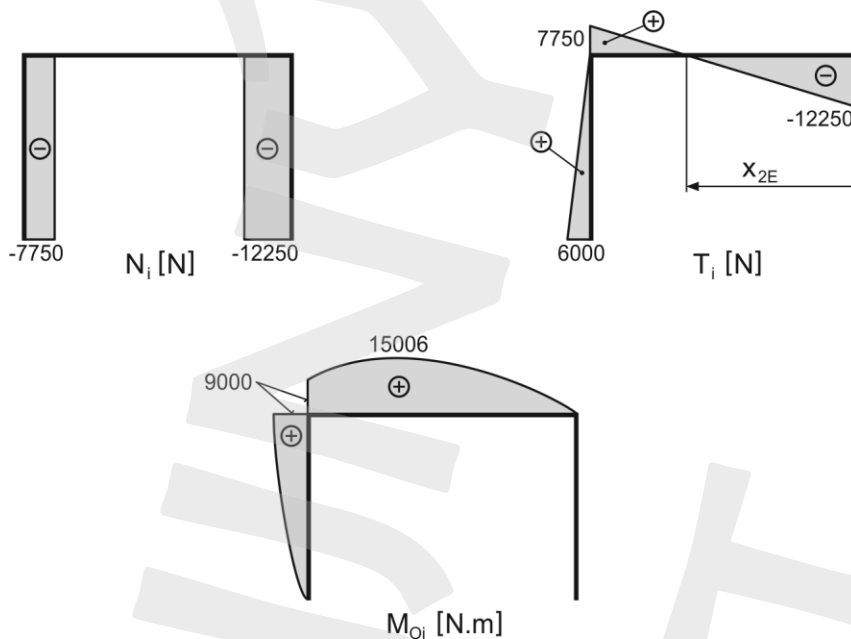
z toho

$$x_{2E} = \frac{12250}{5000} = 2,45 \text{ m}.$$

Hodnota maximálneho ohybového momentu v mieste x_{2E} bude

$$M_{O2}(x_2 = x_{2E}) = 12250 \cdot x_{2E} - 2500 \cdot x_{2E}^2 = 15006 \text{ Nm}.$$

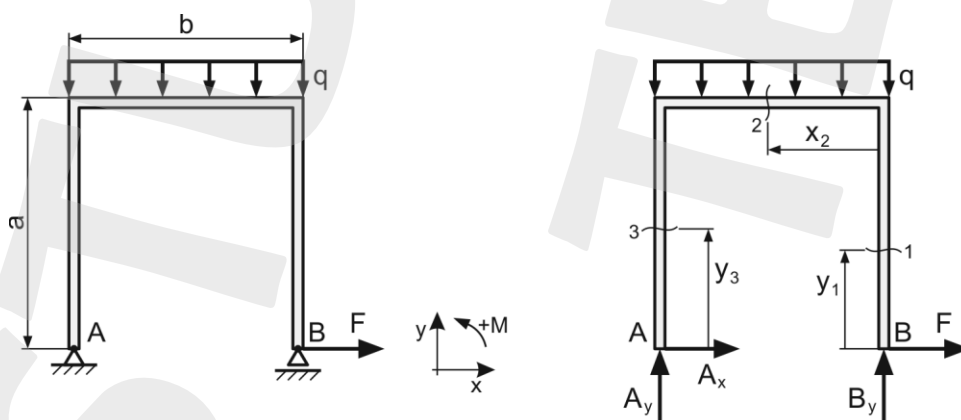
Grafické znázornenie priebehov ohybových momentov, priečných a normálových síl je na obr. 4.



Obr. 4 Priebehy ohybových momentov, priečných a normálových síl

Príklad č. 3

Určte priebehy priečných a normálových síl, ohybových momentov a ohybových normálových napätí v krajných vláknoch prierezu v lomenom nosníku na obrázku 5. Ďalej vypočítajte polohu a hodnotu maximálneho ohybového momentu, normálového napätia v ohybe a posunutie bodu B v smere sily F , ak sú dané rozmery $a = 5$ m, $b = 4$ m, modul pružnosti v ťahu $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, spojitý zaťaženie $q = 5000$ N/m a sila $F = 4000$ N. Prierez bude po celej dĺžke nosníka rovnaký – obdĺžnik s rozmermi $s \times v = 0,1 \times 0,12$ m.



Obr. 5 Lomený nosník zaťažný silou a spojitým zaťažením

Riešenie:

Problém je staticky určitý. Nosník sa uvoľní, zavedú sa reakcie (obr. 5 vpravo) a použitím statických rovníc rovnováhy sa vypočítajú

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + F = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B_y \cdot b - \frac{q \cdot b^2}{2} = 0,$$

$$\sum M_{iB} = 0: \quad -A_y \cdot b + \frac{q \cdot b^2}{2} = 0.$$

Reakcie budú mať hodnoty

$$A_x = -F = -4000 \text{ N},$$

$$A_y = \frac{q_1 \cdot b}{2} = 10000 \text{ N},$$

$$B_y = \frac{q \cdot b}{2} = 10000 \text{ N}.$$

Pomocou metódy mysleneho rezu sa vykoná výpočet vnútorných silových účinkov v jednotlivých rezoch:

1. **rez**, $0 \leq y_1 \leq a$:

$$T_1 = -F = -4000 \text{ N},$$

$$N_1 = -B_y = -10000 \text{ N},$$

$$M_{O1} = F \cdot y_1 = 4000 \cdot y_1.$$

2. **rez**, $0 \leq x_2 \leq b$:

$$T_2 = -B_y + q \cdot x_2 = -10000 + 5000 \cdot x_2,$$

$$N_2 = F = 4000 \text{ N},$$

$$M_{O2} = F \cdot a + B_y \cdot x_2 - q \cdot \frac{x_2^2}{2} = 20000 + 10000 \cdot x_2 - 2500 \cdot x_2^2.$$

3. **rez**, $0 \leq y_3 \leq a$:

$$T_3 = -A_x = 4000 \text{ N},$$

$$N_3 = -A_y = -10000 \text{ N},$$

$$M_{O3} = -A_x \cdot y_3 = -10000 \cdot y_3.$$

Extrém funkcie sa bude nachádzať v druhom poli. Jeho poloha sa vypočíta opäť z predpokladu, že hodnota priecnej sily v tomto bode je nulová, teda

$$T_2 = -10000 + 5000 \cdot x_{2E} = 0,$$

z toho

$$x_{2E} = \frac{10000}{5000} = 2 \text{ m}.$$

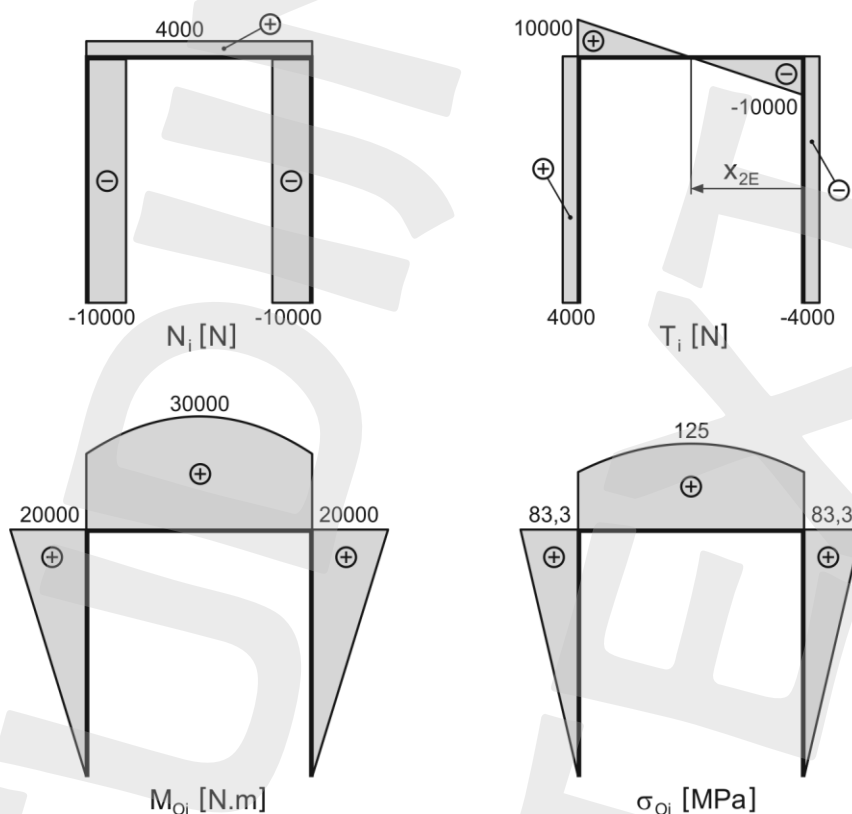
Hodnota maximálneho ohybového momentu v mieste x_{2E} potom bude

$$M_{O2}(x_2 = x_{2E}) = 20000 + 10000 \cdot x_{2E} - 2500 \cdot x_{2E}^2 = 30000 \text{ Nm}.$$

Výpočet maximálneho ohybového normálového napätia v krajných vláknoch prierezu sa vykoná takto

$$\sigma_{Omax} = \frac{M_{Omax}}{W_O} = \frac{6 \cdot M_{Omax}}{s \cdot v^2} = \frac{6 \cdot 30000}{0,1 \cdot 0,12^2} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 125 \text{ MPa}$$

Grafické znázornenie priebehov priečných a normálových síl, ohybových momentov a ohybových normálových napätí je na obr. 6.



Obr. 6 Priebehy priečných a normálových síl, ohybových momentov a normálových napätí

Posunutie bodu B v smere sily F sa vypočíta pomocou 1. Castiglianovej vety (bez uvažovania vplyvu normálových, resp. priečných síl)

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[\int_0^a F \cdot y_1^2 dy_1 + \int_0^b \left(F \cdot a + \frac{q \cdot b \cdot x_2}{2} - \frac{q \cdot x_2^2}{2} \right) \cdot a dx_2 + \int_0^a F \cdot y_3^2 dy_3 \right] = \\ &= \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[\frac{F \cdot a^3}{3} + F \cdot b \cdot a^2 + \frac{q \cdot a \cdot b^3}{4} - \frac{q \cdot a \cdot b^3}{6} + F \cdot \frac{a^3}{3} \right] = \end{aligned}$$

4. **rez**, $0 \leq y_4 \leq a$:

$$T_4 = 0, \quad N_4 = R - F, \quad M_{O4} = R \cdot a - F \cdot 2a.$$

Staticky neurčitá veličina R sa vypočíta pomocou 3. Castiglianovej vety

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 = \sum_{i=1}^4 \int_0^a \frac{M_{Oi}}{E \cdot J_z} \cdot \frac{\partial M_{Oi}}{\partial R} dx_i.$$

Po dosadení

$$0 = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[\int_0^a (-F \cdot x_1) \cdot 0 dx_1 + 0 + \int_0^a (R \cdot x_3 - F \cdot (a + x_3)) \cdot x_3 dx_3 + \int_0^a (R \cdot a - F \cdot 2a) \cdot a dx_4 \right],$$

$$0 = \frac{R \cdot a^3}{3} - \frac{F \cdot a^3}{2} - \frac{F \cdot a^3}{3} + R \cdot a^3 - 2F \cdot a^3 = R \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - F \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \right).$$

Z toho sa vyjadří staticky neurčitá veličina R

$$R = \frac{17F}{8} = \frac{17 \cdot 50000}{8} = 106250 \text{ N}.$$

Následne sa hodnota R dosadí do rovníc na výpočet vnútorných silových veličín v jednotlivých rezoch:

1. **rez**, $0 \leq x_1 \leq a$:

$$T_1 = F = 50000 \text{ N}, \quad N_1 = 0,$$

$$M_{O1} = -F \cdot x_1 = -50000 \cdot x_1.$$

2. **rez**, $0 \leq y_2 \leq a$:

$$T_2 = 0, \quad N_2 = -R = -106250 \text{ N},$$

$$M_{O2} = 0.$$

3. **rez**, $0 \leq x_3 \leq a$:

$$T_3 = F - R = -56250 \text{ N}, \quad N_3 = 0,$$

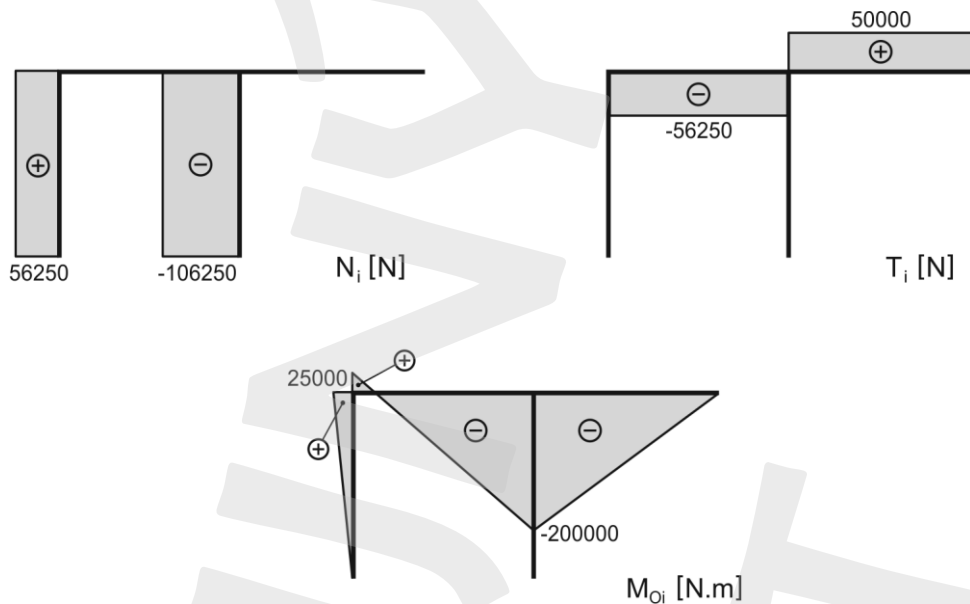
$$M_{O3} = R \cdot x_3 - F \cdot (a + x_3) = \frac{9F \cdot x_3}{8} - F \cdot a = 56250 \cdot x_3 - 200000.$$

4. **rez**, $0 \leq y_4 \leq a$:

$$T_4 = 0, \quad N_4 = R - F = 56250 \text{ N},$$

$$M_{O4} = R \cdot a - F \cdot 2a = \frac{F \cdot a}{8} = 25000 \text{ N}.$$

Priebehy vnútorných silových veličín sú znázornené na obrázku 8.



Obr. 8 Priebehy vnútorných silových veličín

Výpočet posunutia bodu C v smere sily F sa vykoná pomocou 1. Castiglianovej vety

$$w_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum_{i=1}^4 \int_0^a \frac{M_{Oi}}{E \cdot J_z} \cdot \frac{\partial M_{Oi}}{\partial F} dx_i,$$

$$w_F = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[\int_0^a (-F \cdot x_1) \cdot (-x_1) dx_1 + 0 + \int_0^a \left(\frac{9F \cdot x_3}{8} - F \cdot a \right) \cdot \left(\frac{9x_3}{8} - a \right) dx_3 + \int_0^a \frac{F \cdot a}{8} \cdot \frac{a}{8} dx_4 \right],$$

$$w_F = \frac{31F \cdot a^3}{48E \cdot J_z} = \frac{31 \cdot 50000 \cdot 4^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 151,6 \cdot 10^{-6}} = 0,0649 \text{ m}.$$

Príklad č. 5

Vypočítajte hrúbku steny rúrky t s vonkajším priemerom $D = 0,06 \text{ m}$, tvoriacej rám na obr. 9. Dané: zaťažujúca sila $F = 30000 \text{ N}$, $a = 0,8 \text{ m}$, maximálne dovolené napätie v ohybe $\sigma_D = 210 \text{ MPa}$.

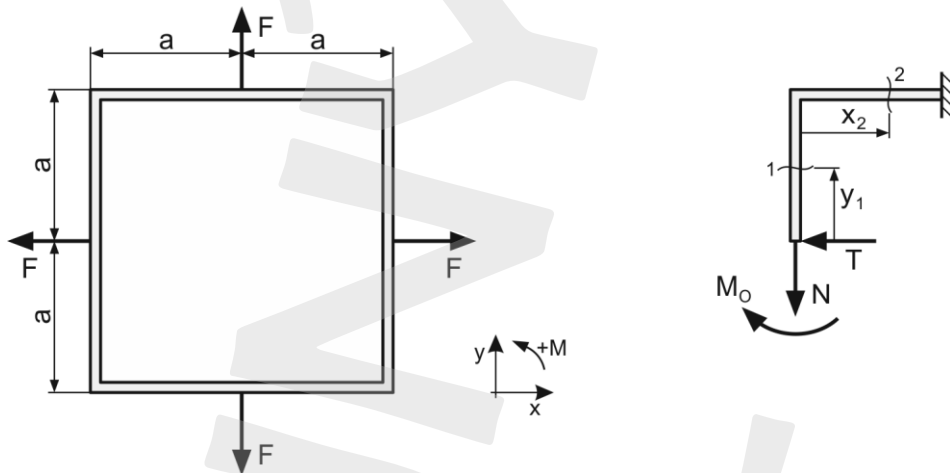
Riešenie:

Geometria rámu a vonkajšie zaťaženia sú symetrické okolo oboch osí. To znamená, že stačí riešiť štvrtinu rámu (obr. 9 vpravo) [4, 9, 26].

Rám je trikrát staticky neurčitý, ale vzhľadom na dvojnásobnú symetriu sa neznáme vnútorné sily T a N určia ľahko z podmienok symetrie:

$$T = \frac{F}{2} = \frac{30000}{2} = 15000 \text{ N},$$

$$N = \frac{F}{2} = 15000 \text{ N}.$$

Obr. 9 Uzatvorený rám zaťažný silami F

Jedinou neznámou (staticky neurčitou) veličinou ostane moment M_O . Ten sa vypočíta pomocou tretej Castiglianovej vety

$$\frac{\partial U}{\partial M_O} = 0.$$

Do celkovej energie napätosti sa zahrnie len energia od ohybových momentov, preto sa vyjadrí ich priebeh v jednotlivých rezoch:

1. rez, $0 \leq y_1 \leq a$:

$$M_{O1} = T \cdot y_1 + M_O = \frac{F}{2} \cdot y_1 + M_O.$$

2. rez, $0 \leq x_2 \leq a$:

$$M_{O2} = -N \cdot x_2 + M_O + T \cdot a = -\frac{F}{2} \cdot x_2 + M_O + \frac{F}{2} \cdot a.$$

Teraz sa už môže vypočítať staticky neurčitá veličina M_O

$$\frac{\partial U}{\partial M_O} = 0 = \frac{4}{E \cdot J} \cdot \sum_{i=1}^4 \int_0^a M_{Oi} \cdot \frac{\partial M_{Oi}}{\partial M_O} dx_i,$$

$$0 = \frac{4}{E \cdot J} \cdot \left[\int_0^a \left(\frac{F}{2} \cdot y_1 + M_O \right) \cdot 1 dy_1 + \int_0^a \left(\frac{F}{2} \cdot (a - x_2) + M_O \right) \cdot 1 dx_2 \right].$$

Po úprave a dosadení sa vyjadrí hodnota M_O

$$M_O = -\frac{F \cdot a}{4} = -\frac{30000 \cdot 0,8}{4} = -6000 \text{ Nm}.$$

Ohybové momenty v jednotlivých poliach rámu budú mať po dosadení M_O nasledujúci tvar:

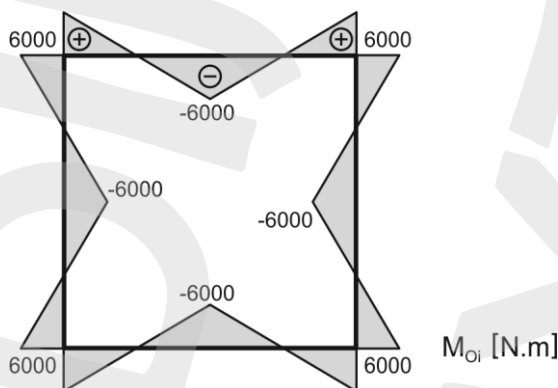
1. *rez*, $0 \leq y_1 \leq a$:

$$M_{O1} = \frac{F}{2} \cdot y_1 + M_O = 15000 \cdot y_1 - 6000.$$

2. *rez*, $0 \leq x_2 \leq a$:

$$M_{O2} = -\frac{F}{2} \cdot x_2 + M_O + \frac{F}{2} \cdot a = -15000 \cdot x_2 + 6000.$$

Po dosadení hraníc intervalov z predošlých vzťahov vyplýva, že maximálnou hodnotou ohybového momentu je $M_{Omax} = 6000 \text{ Nm}$. Výsledné priebehy ohybových momentov sú zobrazené na obr. 10.



Obr. 10 Priebehy ohybových momentov na ráme

Na výpočet hrúbky steny rúrky sa využije pevnostná podmienka

$$\frac{M_{Omax}}{W_O} \leq \sigma_D.$$

Určí sa prierezový modul v ohybe W_O

$$W_O = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{\pi \cdot (D - 2t)^4}{32D}.$$

Po dosadení do pevnostnej podmienky sa vypočíta neznáma hrúbka steny rúrky

$$W_O \geq \frac{M_{Omax}}{\sigma_D} \Rightarrow \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{\pi \cdot (D - 2t)^4}{32D} \geq \frac{M_{Omax}}{\sigma_D},$$

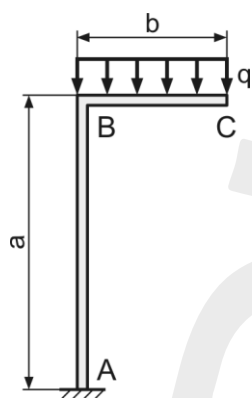
$$t \geq \frac{1}{2} \left(D - \sqrt[4]{\frac{32 M_{Omax} \cdot D}{\pi \cdot \sigma_D} - D^4} \right) = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6000 \cdot 0,06}{\pi \cdot 210 \cdot 10^6} - 0,06^4} \right) \Rightarrow t \geq 0,007 \text{ m}.$$

Neriešené úlohy (zalomené nosníky a rámy)

V úlohách 6 až 8 vypočítajte priebehy priečných a normálových síl a ohybových momentov. Ďalej vo vybraných bodoch vypočítajte posunutia v smere osi x , resp. y , ak je dané: $E = 2,08 \cdot 10^{11}$ Pa, $a = 3$ m, $b = 1,5$ m, $F = 10000$ N, $q = 5000$ Nm⁻¹. Nosníky pozostávajú z profilu I-180 s nasledujúcimi parametrami: plocha prierezu $A = 2790$ mm², osový kvadratický moment $J_z = 14,4 \cdot 10^6$ mm⁴, výška profilu $h = 180$ mm, prierezový modul v ohybe $W_O = 160000$ mm³.

Staticky určité úlohy

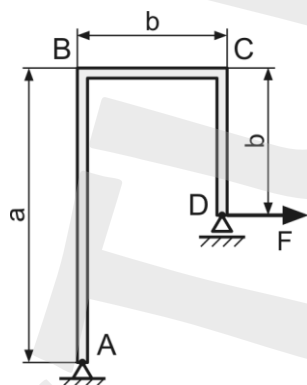
Úloha č. 6



Bod	Posunutie u_x [m]	Posunutie u_y [m]	Ohybový moment [Nm]
A	0	0	-5620
B	$8,45 \cdot 10^{-3}$	$3,88 \cdot 10^{-5}$	-5620
C	$8,45 \cdot 10^{-3}$	$9,55 \cdot 10^{-3}$	0

Obr. 11 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 6

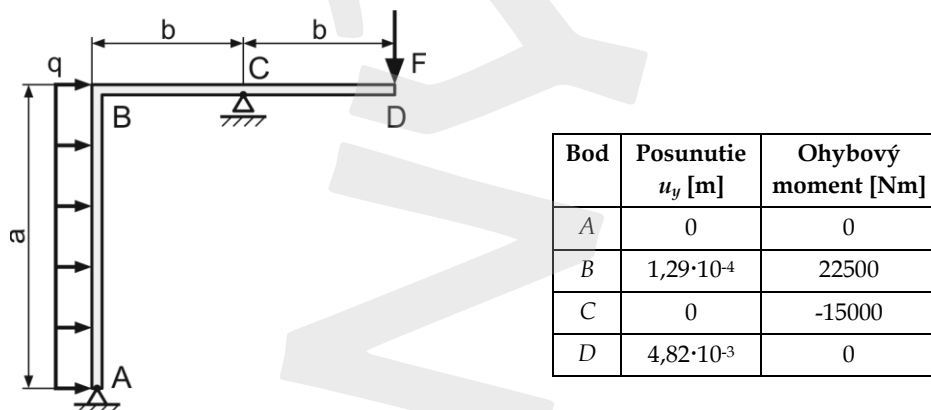
Úloha č. 7



Bod	Posunutie u_x [m]	Posunutie u_y [m]	Ohybový moment [Nm]
A	0	0	0
B	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$5,17 \cdot 10^{-5}$	30000
C	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$2,58 \cdot 10^{-5}$	15000
D	$6,0 \cdot 10^{-2}$	0	0

Obr. 12 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 7

Úloha č. 8

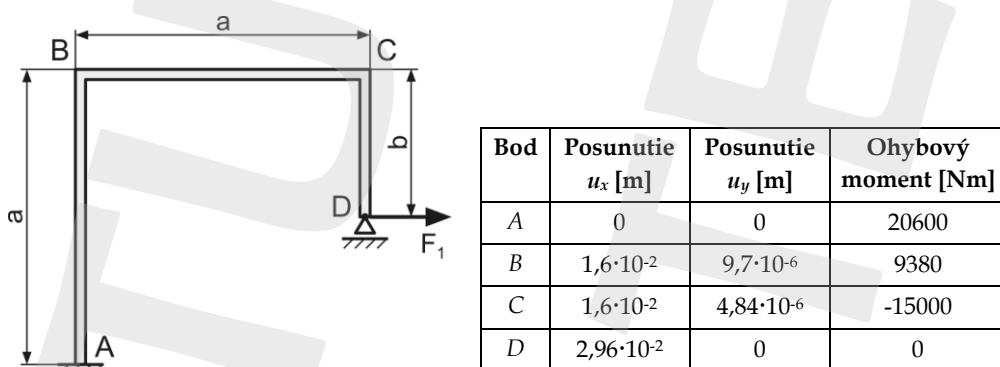


Obr. 13 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 8

Staticky neurčité úlohy

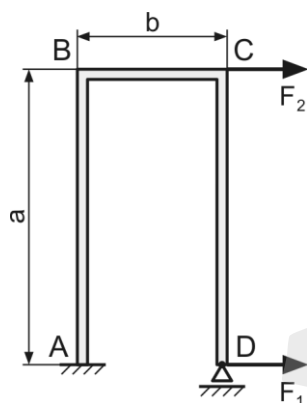
V staticky neurčitých konštrukciách na obr. 14 až 17 vypočítajte priebehy ohybových momentov, priečnych a normálových síl a vo vybraných bodoch posunutia v smere osi x , resp. y . Dané: modul pružnosti v ťahu $E = 2,08 \cdot 10^{11}$ Pa, $a = 3$ m, $b = 1,5$ m, $F_1 = 10000$ N, $F_2 = 5000$ N, spojité zaťaženie $q = 5000$ Nm⁻¹. Profil nosníkov je I-180 s parametrami: prierezová plocha $A = 2790$ mm², osový kvadratický moment prierezu $J_z = 14,4 \cdot 10^6$ mm⁴, výška profilu $h = 180$ mm, prierezový modul v ohybe $W_O = 160000$ mm³.

Úloha č. 9



Obr. 14 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 9

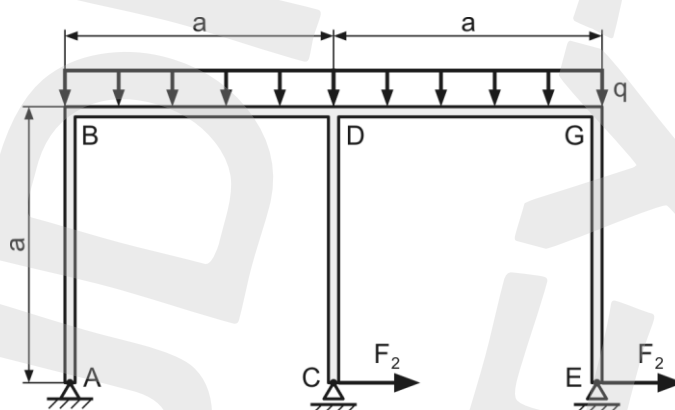
Úloha č. 10



Bod	Posunutie u_x [m]	Posunutie u_y [m]	Ohybový moment [Nm]
A	0	0	-27810
B	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$4,37 \cdot 10^{-6}$	17190
C	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$4,37 \cdot 10^{-6}$	-30000
D	$6,82 \cdot 10^{-2}$	0	0

Obr. 15 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 10

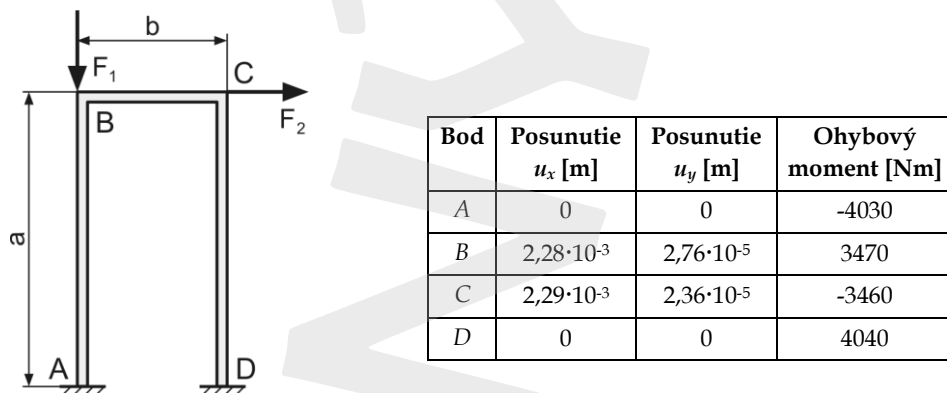
Úloha č. 11



Bod	Posunutie u_x [m]	Posunutie u_y [m]	Ohybový moment [Nm]
A	0	0	0
B	$6,14 \cdot 10^{-2}$	$2,87 \cdot 10^{-5}$	30000
C	$8,77 \cdot 10^{-2}$	0	0
D	$6,14 \cdot 10^{-2}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	-9130, -15000, -24000
E	$8,53 \cdot 10^{-2}$	0	0
G	$6,15 \cdot 10^{-2}$	$2,87 \cdot 10^{-5}$	-15000

Obr. 16 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 11

Úloha č. 12



Obr. 17 Zalomený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 12

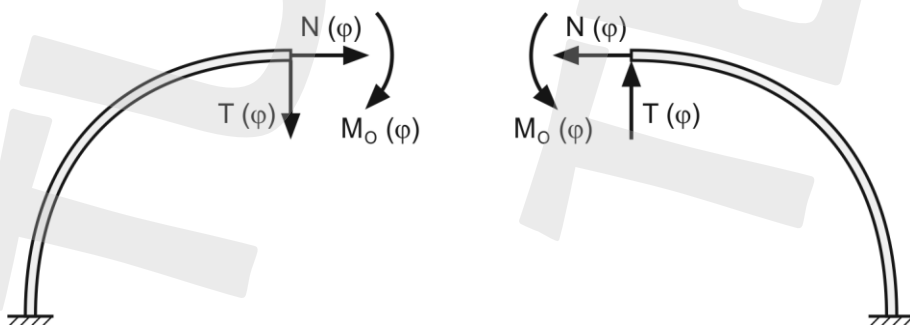
2 Slabo zakrivené nosníky a rámy

Táto podkapitola sa bude zaoberať slabo zakrivenými rovinnými nosníkmi. Slabo zakrivené nosníky musia spĺňať podmienku, že výška ich priečného prierezu (resp. hrúbka) h je oveľa menšia ako polomer zakrivenia r , teda

$$\frac{h}{r} \leq 0,1 \text{ až } 0,2.$$

Ďalej sú zavedené nasledujúce predpoklady:

- os prúta (strednica) je rovinná krivka,
- zaťažujúce sily a momenty ležia v danej rovine,
- platí Hookeov zákon,
- prút je dostatočne tuhý, takže sa uvažujú len malé deformácie.



Obr. 18 Predpoklad vnútorných silových účinkov pri myslenom reze

Riešenie priebehu vnútorných silových veličín sa bude opäť robiť pomocou metódy myslenného rezu. Vnútorný ohybový moment M_0 sa bude považovať podľa [16] za kladný, ak namáha vnútornú stranu prierezu (vnútorné vlákna zakriveného nosníka) na tlak a vonkajšiu na ťah. To vlastne zväčšuje krivosť prúta (zmenšuje polomer, obr. 18).

Osová (normálová) sila N je kladná, ak pôsobí z rezu smerom von a priečna sila T je kladná, ak je otočená voči normálovej o 90° v smere pohybu hodinových ručičiek (obr. 18).

V niektorej odbornej literatúre [4, 21, 25] je za kladný ohybový moment považovaný opačne orientovaný moment, ako sa zaviedol v tejto kapitole. To však nemá vplyv na jeho výsledný priebeh, iba na znamienko. Vo výpočtoch sa budú ďalej používať aj vzťahy z predošlých kapitol, predovšetkým Castiglianove vety.

Pre zakrivený nosník, ktorého strednicou je všeobecná rovinná krivka, platí Boussinesquova diferenciálna rovnica

$$\frac{d^2 w(s)}{ds^2} + \frac{w(s)}{r^2(s)} = \frac{M_O(s)}{E \cdot J_z(s)}, \quad (1)$$

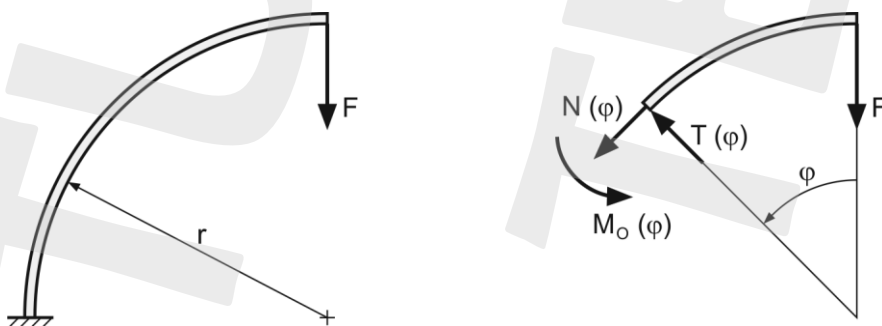
kde s je dĺžka oblúka meraná na strednici nosníka a $w(s)$ je funkcia priehybovej čiary v radiálnom smere vzťahnutá na strednicu. V ďalších úvahách sa obmedzíme len na strednice s konštantným polomerom zakrivenia $r(s) = r = \text{konšt.}$ Pôjde teda o kružnicu alebo jej časť a dĺžka strednice bude $s = r \cdot \varphi$. Na základe tohto predpokladu sa diferenciálna rovnica (1) pre $J_z = \text{konšt.}$ zjednoduší na tvar

$$\frac{d^2 w(\varphi)}{d\varphi^2} + w(\varphi) = \frac{M_O(\varphi) \cdot r^2}{E \cdot J_z}. \quad (2)$$

Riešené príklady (slabo zakrivené nosníky a rámy)

Príklad č. 13

Vypočítajte priebeh vnútorných silových veličín a funkciu priehybovej čiary pre slabo zakrivený nosník na obrázku 19, ak je daná sila F , polomer zakrivenia r , modul pružnosti v ťahu E a kvadratický moment prierezu J_z .



Obr. 19 Zakrivený votknutý nosník zaťažený silou F

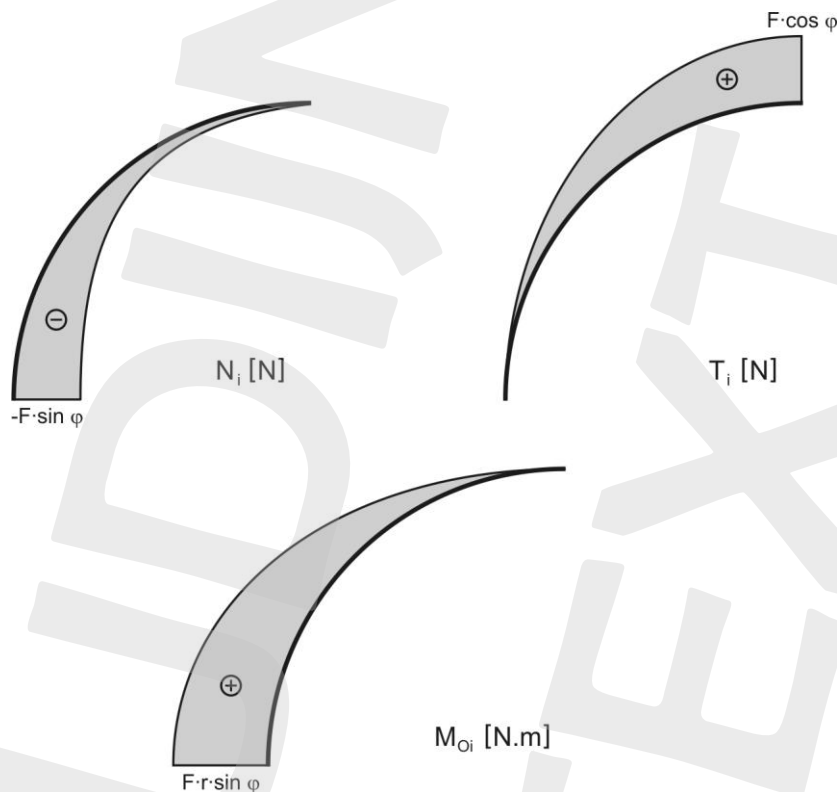
Riešenie:

Priebeh vnútorných síl a ohybových momentov sa určí metódou mysleného rezu (obr. 19 vpravo). Na vyriešenie vnútorných silových veličín stačí urobiť jeden myslený rez od

voľného konca nosníka. Výsledný priebeh vnútorných silových veličín závisí od uhla φ , ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) a príslušné rovnice rovnováhy síl v smere normály a tangenty a rovnica rovnováhy momentov budú mať tvar:

$$\begin{aligned} \text{n: } N + F \cdot \sin \varphi &= 0 & \Rightarrow & N = -F \cdot \sin \varphi, \\ \text{t: } T - F \cdot \cos \varphi &= 0 & \Rightarrow & T = F \cdot \cos \varphi, \\ -M_O + F \cdot r \cdot \sin \varphi &= 0 & \Rightarrow & M_O = F \cdot r \cdot \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Grafické znázornenie priebehov vnútorných silových veličín je na obrázku 20.



Obr. 20 Priebehy vnútorných silových veličín v zakrivenom nosníku

Diferenciálna rovnica priehybovej čiary bude mať tvar

$$\frac{d^2 w(\varphi)}{d\varphi^2} + w(\varphi) = \frac{M_O(\varphi) \cdot r^2}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot J_z} \cdot \sin \varphi.$$

Ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami a s pravou stranou.

Jej riešenie bude

$$w(\varphi) = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi - \frac{F \cdot r^3}{2E \cdot J_z} \cdot \varphi \cdot \cos \varphi$$

Integračné konštanty A a B sa určia z okrajových podmienok vo votknutí

$$w\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{dw}{d\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

z čoho

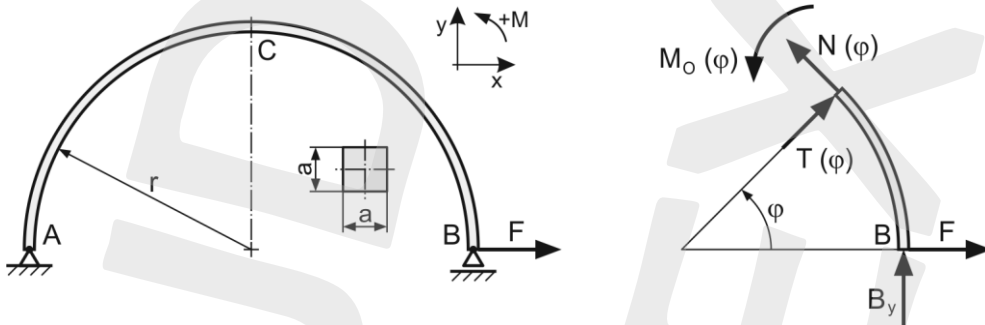
$$A = \frac{\pi \cdot F \cdot r^3}{4E \cdot J_z} \quad \text{a} \quad B = 0.$$

Výsledná rovnica priehybovej čiary bude potom

$$w(\varphi) = \frac{F \cdot r^3}{2E \cdot J_z} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \cos \varphi$$

Príklad č. 14

Vypočítajte rozmer a štvorcového prierezu krivého prúta tak, aby vodorovné posunutie bodu B bolo rovné 0,01 m. Potom skontrolujte, či krivý prút na obr. 21 vyhovuje pevnostnej podmienke, ak maximálne dovolené napätie je $\sigma_D = 150$ MPa. Dané sú veličiny: $F = 5000$ N, $r = 2$ m, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa.



Obr. 21 Zakrivený prút zaťažný silou F

Riešenie:

Zakrivený nosník je staticky určitý. Pomocou statických rovníc rovnováhy sa vypočítajú reakcie v bodoch A a B

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -A_x + F = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + B_y = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B_y \cdot 2r = 0.$$

Ich vyriešením dostaneme reakcie

$$A_x = F = 5000 \text{ N}, \quad A_y = 0, \quad B_y = 0.$$

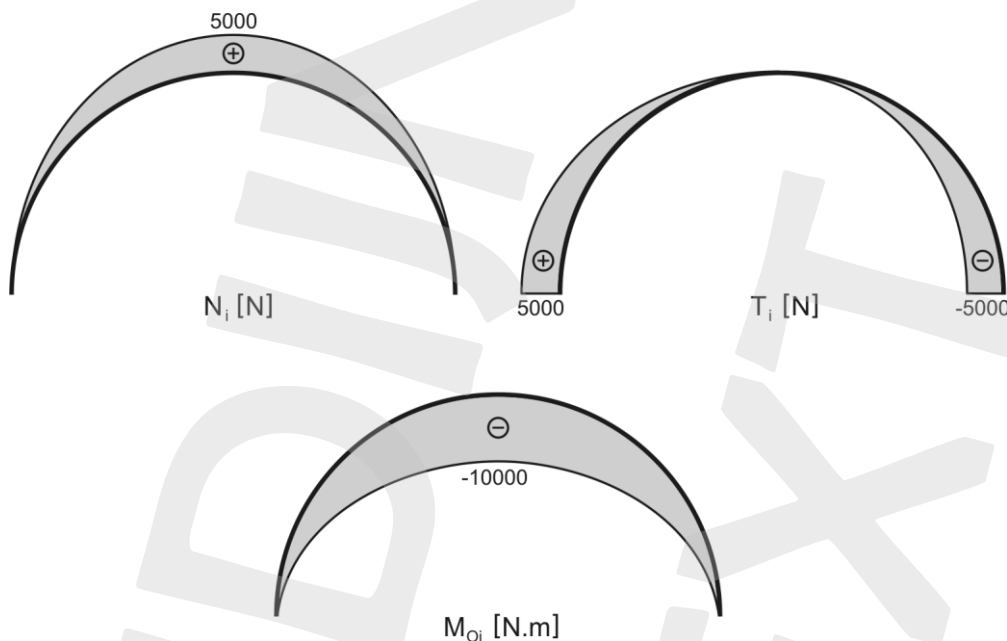
Metódou myslenného rezu (Obr. 21 vpravo) sa určia priebehy vnútorných silových veličín, ak $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$N = F \cdot \sin \varphi = 5000 \cdot \sin \varphi ,$$

$$T = -F \cdot \cos \varphi = -5000 \cdot \cos \varphi ,$$

$$M_O = -F \cdot r \cdot \sin \varphi = -10000 \cdot \sin \varphi .$$

Grafické znázornenie závislosti N , T a M_O od uhla φ je na obrázku 22.



Obr. 22 Priebehy vnútorných silových veličín N , T a M_O

Výpočet posunutia x_F sa vykoná pomocou 1. Castiglianovej vety

$$x_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^\pi M_O \cdot \frac{\partial M_O}{\partial F} \cdot r \, d\varphi = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^\pi (-F \cdot r \cdot \sin \varphi) \cdot (-r \cdot \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi ,$$

$$x_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot J} \cdot \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot J} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi = \frac{\pi \cdot F \cdot r^3}{2E \cdot J} .$$

Na základe zadaného prierezu sa za osový kvadratický moment dosadí $J = \frac{a^4}{12}$ a následne sa vypočíta hodnota a

$$x_F = \frac{6\pi \cdot F \cdot r^3}{E \cdot a^4} \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{6\pi \cdot F \cdot r^3}{E \cdot x_F}} = \sqrt[4]{\frac{6\pi \cdot 5000 \cdot 2^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,01}} = 0,138 \text{ m} .$$

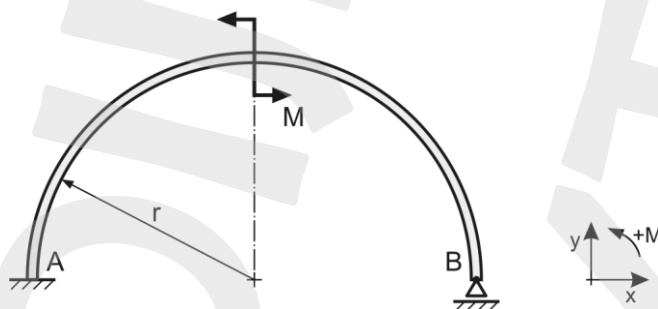
Maximálna veľkosť ohybového momentu je v bode C. Tam sa teda bude predpokladať aj maximálne normálové napätie v ohybe

$$\sigma_{Omax} = \frac{|M_{Omax}|}{W_O} = \frac{|M_{Omax}|}{J \cdot \frac{2}{a}} = \frac{F \cdot r}{\frac{a^4}{12} \cdot \frac{2}{a}} = \frac{6F \cdot r}{a^3} = \frac{6 \cdot 5000 \cdot 2}{0,138^3} = 22,83 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 22,83 \text{ MPa}.$$

Pretože maximálne dovolené napätie je 150 MPa, navrhnutý prierez pevnostne vyhovuje ($22,83 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa}$).

Príklad č. 15

Určte priebeh vnútorných silových veličín v zakrivenom prúte (nosníku) na obr. 23, ak polomer zakrivenia $r = 2 \text{ m}$ a zaťažujúci moment $M = 1000 \text{ Nm}$.



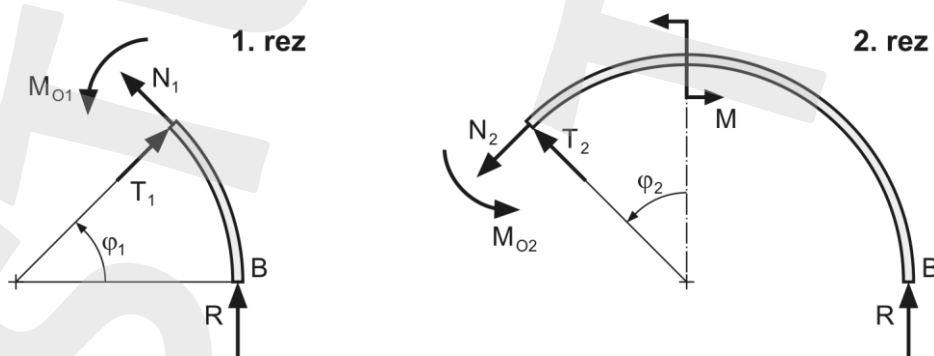
Obr. 23 Zakrivený prút zaťažovaný momentom M

Riešenie:

Úvodom sa posúdi statická určitosť sústavy

$$n = 3 - 3 - 1 = -1 \Rightarrow \text{zakrivený prút je jedenkrát staticky neurčitý.}$$

Ako staticky neurčitá veličina sa zvolí vertikálna reakcia v bode B a označí sa R . Zavedením veličiny R sa vytvoril staticky určitý model s voľným koncom v bode B a votknutím v bode A.



Obr. 24 Predpoklad vnútorných silových účinkov pri myslených rezoch

Na určenie priebehu vnútorných silových veličín sa opäť použije metóda mysleného rezu. Pretože sa môže „rezať“ z bodu B v smere proti pohybu hodinových ručičiek, nie je potrebné poznať reakcie v bode A a nemusia sa riešiť statické rovnice rovnováhy pre celý prút. Zaťažujúci moment M delí prút na dva úseky, preto aj riešenie priebehu vnútorných síl a momentov bude rozdelené na dve polia v súlade s obr. 24.

Riešenie vnútorných silových účinkov:

1. **rez** ($0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$):

$$N_1 = -R \cdot \cos \varphi_1,$$

$$T_1 = -R \cdot \sin \varphi_1,$$

$$M_{O1} = -R \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_1).$$

2. **rez** ($0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2$):

$$N_2 = R \cdot \sin \varphi_2,$$

$$T_2 = -R \cdot \cos \varphi_2,$$

$$M_{O2} = -M - R \cdot r \cdot (1 + \sin \varphi_2).$$

Staticky neurčitá veličina R sa vypočíta pomocou 3. Castiglianovej vety s uvažovaním energie napätosti iba od ohybových momentov

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\pi/2} \frac{M_{Oi}}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M_{Oi}}{\partial R} \cdot r \, d\varphi_i.$$

Po dosadení ohybových momentov

$$0 = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} R \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_1) \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi_1) \cdot r \, d\varphi_1 + \\ + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} [-M - R \cdot r \cdot (1 + \sin \varphi_2)] \cdot [-r \cdot (1 + \sin \varphi_2)] \cdot r \, d\varphi_2$$

a po vyriešení integrálov sa získa rovnica

$$R \cdot r^3 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) + M \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + R \cdot r^3 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} + 2 \right) = 0.$$

Z tejto rovnice sa po vyjadrení vypočíta staticky neurčitá veličina R

$$R = \frac{-2M}{3r} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-2 \cdot 1000}{3 \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = -856,9 \text{ N}.$$

Výsledné priebehy vnútorných silových veličín potom budú:

1. **rez** ($0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$):

$$N_1 = 856,9 \cdot \cos \varphi_1,$$

$$T_1 = 856,9 \cdot \sin \varphi_1,$$

$$M_{O1} = 856,9 \cdot 2 \cdot (1 - \cos \varphi_1).$$

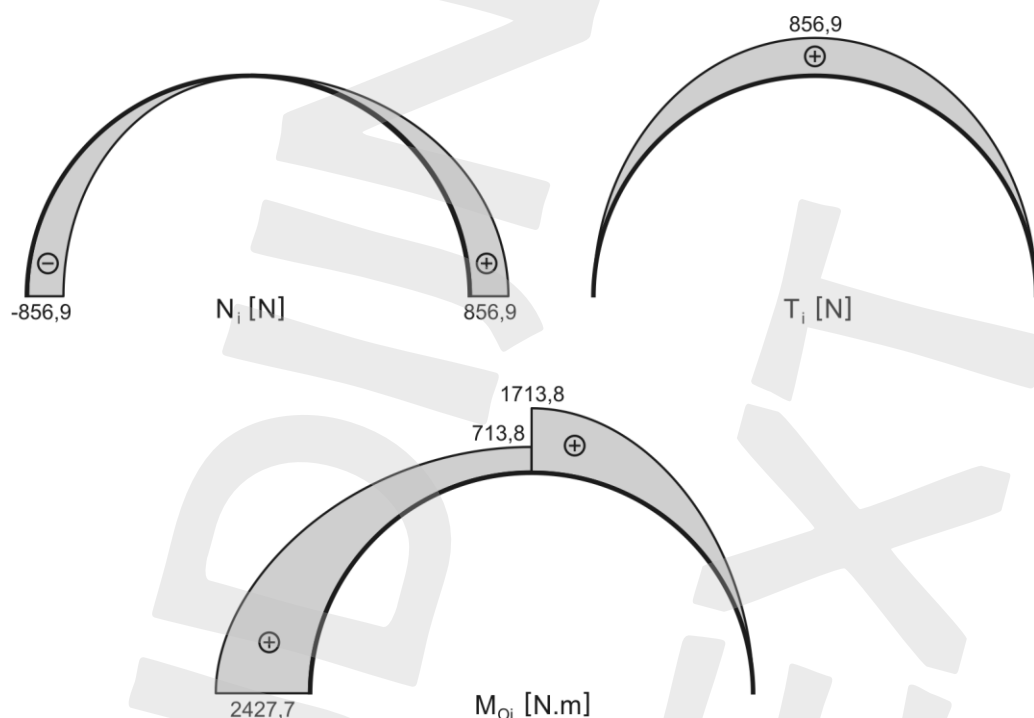
2. *rez* ($0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2$):

$$N_2 = -856,9 \cdot \sin \varphi_2,$$

$$T_2 = 856,9 \cdot \cos \varphi_2,$$

$$M_{O2} = -1000 + 856,9 \cdot 2 \cdot (1 + \sin \varphi_2).$$

Grafické znázornenie priebehu vnútorných silových veličín je na obrázku 25.



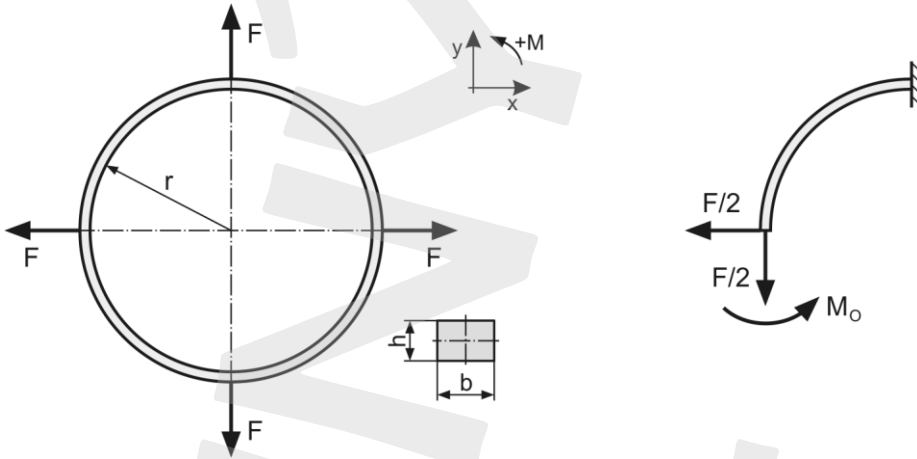
Obr. 25 Priebehy vnútorných silových veličín na staticky neurčitom prúte

Príklad č. 16

Určte priebehy vnútorných silových veličín a maximálne normálové napätie v obruči na obr. 26, ak je dané: modul pružnosti v ťahu $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, priemer obruče $r = 1$ m, zaťažujúca sila $F = 10000$ N a priečny prierez má obdĺžnikový tvar s rozmermi $b \times h = 0,1 \times 0,05$ m.

Riešenie:

Vzhľadom na dvojnásobnú symetriu rámu aj zaťaženie je opäť možné riešiť iba štvrtinu rámu tak, ako je to znázornené na obr. 26 (podobne ako príklad 5). Úloha je 3-krát staticky neurčitá, ale vzhľadom na spomínanú symetriu sa môžu ľahko určiť neznáme vnútorné sily.



Obr. 26 Symetricky zaťažená obruč s obdĺžnikovým prierezom

Hodnota normálovej sily v príslušnom mieste rozdelenia objektu bude $F/2$ a priečnej sily tiež $F/2$ (obr. 26 vpravo). Jedinou neznámou veličinou ostane teda hodnota ohybového momentu M_O . Ten sa vypočíta pomocou 3. Castiglianovej vety.

V súlade s predpokladom vnútorných silových veličín na obrázku sa určia priebehy ohybového momentu, normálovej a priečnej sily

$$\begin{aligned} \text{n: } N - \frac{F}{2} \cdot \sin \varphi - \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \text{t: } T + \frac{F}{2} \cdot \sin \varphi - \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi &= 0, \\ M_{O\varphi} - M_O + \frac{F \cdot r}{2} \cdot \sin \varphi - \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Z týchto rovníc sa vyjadria veličiny N , T a M_O

$$N = \frac{F}{2} \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi),$$

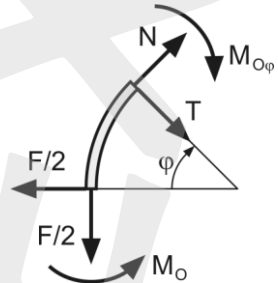
$$T = \frac{F}{2} \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$M_{O\varphi} = M_O + \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \cos \varphi - \sin \varphi).$$

Použitím tretej Castiglianovej vety sa vypočíta staticky neurčitá veličina M_O

$$\frac{\partial U}{\partial M_O} = 0 = \frac{\partial}{\partial M_O} \left\{ \frac{4}{2E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[M_O + \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \sin \varphi - \cos \varphi) \right]^2 \cdot r \, d\varphi \right\},$$

$$\frac{4}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[M_O + \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \sin \varphi - \cos \varphi) \right] \cdot 1 \cdot r \, d\varphi = 0.$$



Po integrácii sa získa rovnica

$$\frac{\pi \cdot M_O \cdot r}{2} + \frac{\pi \cdot F \cdot r^2}{2} = 0$$

a po úprave a dosadení sa vyjadří hodnota M_O

$$M_O = -\frac{F \cdot r}{2} = -\frac{10000 \cdot 1}{2} = -5000 \text{ Nm}.$$

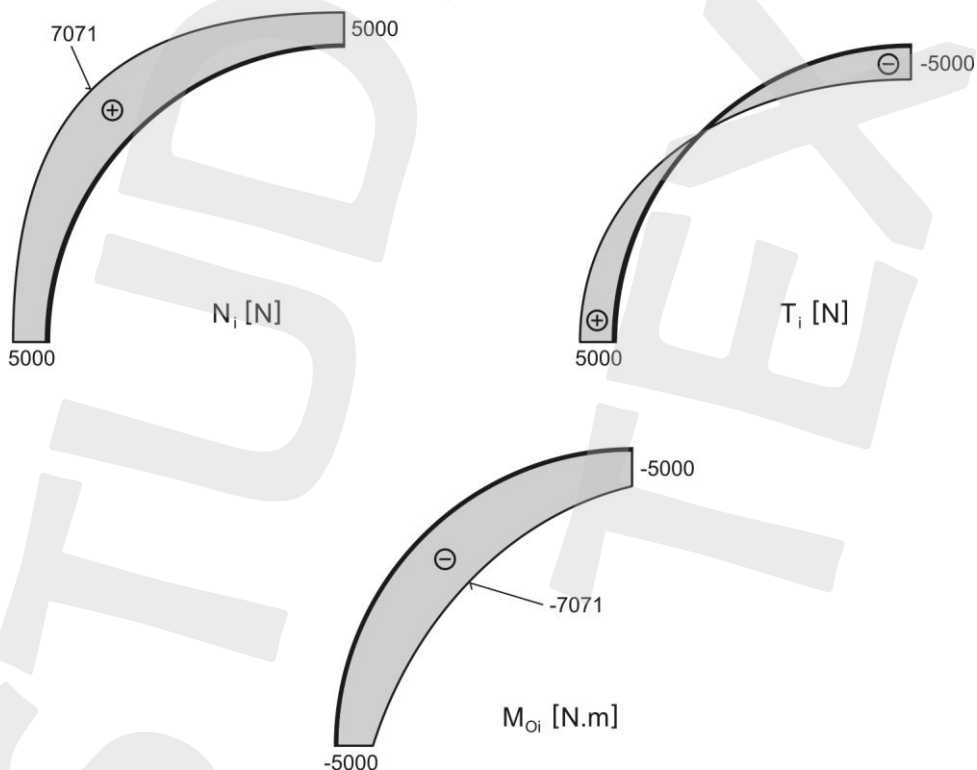
Výsledné rovnice pre priebehy vnútorných silových veličín budú mať potom tvar

$$N = \frac{F}{2} \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi) = 5000 \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi),$$

$$T = \frac{F}{2} \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi) = 5000 \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$M_{O\varphi} = M_O + \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \cos \varphi - \sin \varphi) = -5000 + 5000 \cdot (1 - \cos \varphi - \sin \varphi).$$

Priebehy vyšetrovaných vnútorných silových veličín na štvrtine obruče sú graficky znázornené na obrázku 2



Obr. 27 Priebehy vyšetrovaných vnútorných silových veličín

Z priebehu ohybového momentu možno usúdiť, že maximálne normálové napätie bude tam, kde je maximálna absolútna hodnota veľkosti ohybového momentu, t.j. v bode pootočenom od vodorovnej osi v smere hodinových ručičiek o uhol 45° . Keďže ide o slabo zakrivený prút ($h/r < 0,1$), normálové ohybové napätie nie je po priereze rozložené podľa hyperbolického zákona (podrobnejšie v [17, 21]), ale podľa známeho lineárneho zákona (priame a lomené nosníky a rámy). Na základe toho hodnota maximálneho ohybového normálového napätia bude

$$\sigma_{O_{max}} = \sigma_O \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{M_{O\varphi} \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \pm \frac{-5000 + 5000 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{0,1 \cdot 0,05^2}{6}},$$

$$\sigma_{O_{max}} = \pm \frac{-7071}{0,000046} = \pm 1,697 \cdot 10^8 \text{ Pa} = \pm 169,7 \text{ MPa}.$$

Vzhľadom na záporný ohybový moment sa znamienko „-“ priradí k napätiu na vrchnom vlákne prierezu a znamienko „+“ bude platiť pre napätie na spodnom vlákne prierezu.

Ďalej sa vypočíta normálové napätie od normálovej sily

$$\sigma_n = \frac{N \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right)}{b \cdot h} = \frac{7071}{0,1 \cdot 0,05} = 1,414 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,414 \text{ MPa}.$$

Normálová sila je ťahová, preto aj príslušné normálové napätie je ťahové (kladné). Výsledné normálové napätia teda budú:

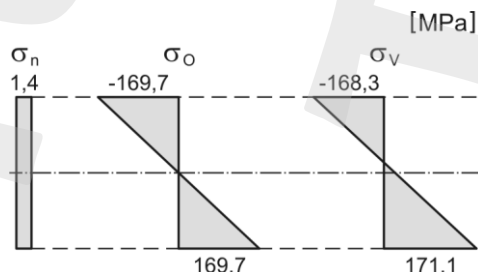
1. na vrchnom vlákne prierezu

$$\sigma_V^h = \sigma_n + \sigma_O = 1,4 - 169,7 = -168,3 \text{ MPa},$$

2. na spodnom vlákne prierezu

$$\sigma_V^d = \sigma_n + \sigma_O = 1,4 + 169,7 = 171,1 \text{ MPa}.$$

Vypočítaný priebeh normálových napätí je graficky znázornený na obr. 28.



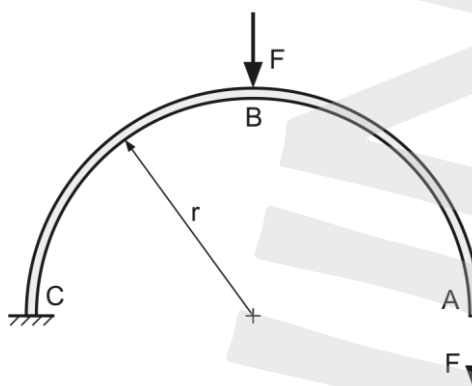
Obr. 28 Priebeh normálových napätí

Neriešené úlohy (slabo zakrivené nosníky a rámy)

Staticky určité úlohy

Úloha č. 17

Na zakrivenom nosníku zaťaženom silou F vypočítajte vnútorné silové veličiny (pričné sily, normálové sily a ohybový moment), ak je dané: $F = 1000 \text{ N}$ a $r = 1,5 \text{ m}$.

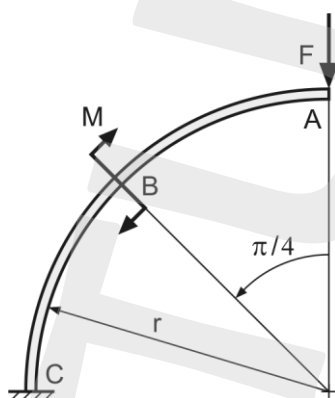


Bod	$N \text{ [N]}$	$T \text{ [N]}$	$M_O \text{ [Nm]}$
A	1000	0	0
B	0	1000, 2000	1500
C	2000	0	4500

Obr. 29 Zakrivený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 17

Úloha č. 18

Vypočítajte vnútorné silové veličiny (normálové a pričné sily, ohybový moment) na zakrivenom prúte, zaťaženom silou F a momentom M . Dané: $F = 1000 \text{ N}$, $M = 200 \text{ Nm}$ a $r = 1,5 \text{ m}$.

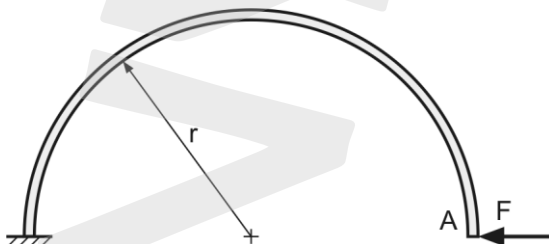


Bod	$N \text{ [N]}$	$T \text{ [N]}$	$M_O \text{ [Nm]}$
A	0	1000	0
B	707	707	1414, 3414
C	-1000	0	4000

Obr. 30 Zakrivený nosník a kontrolné výsledky k úlohe 18

Úloha č. 19

Vypočítajte posunutie bodu A v smere sily F na zakrivenom nosníku na obr. 31.



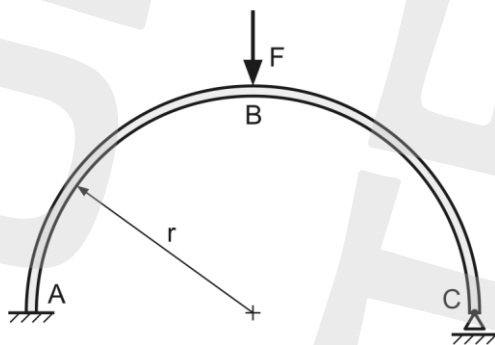
Obr. 31 Zakrivený nosník zaťažný silou F

Kontrolný výsledok:

$$\Delta_F = \frac{\pi \cdot F \cdot r^3}{E \cdot J}$$

Staticky neurčité úlohy**Úloha č. 20**

Určte vnútorné silové veličiny (normálové a priečne sily, ohybový moment) a vypočítajte vodorovné posunutie bodu C a zvislé posunutie bodu B, ak je dané: $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $J = 0,000002$ m⁴, $F = 10000$ N a $r = 2,5$ m.



Obr. 32 Staticky neurčitý zakrivený nosník zaťažný silou F

Kontrolné výsledky:

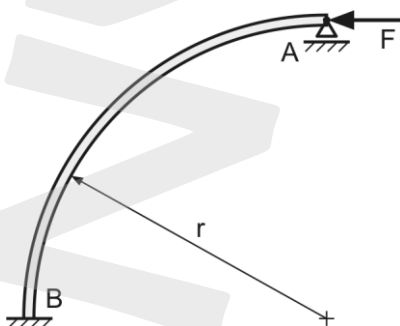
Vodorovné posunutie bodu C a zvislé posunutie bodu B:

$$x_C = \frac{(8 - \pi) \cdot F \cdot r^3}{6\pi \cdot E \cdot J} = 0,096 \text{ m},$$

$$y_B^F = \frac{(5\pi^2 - 8\pi - 16) \cdot F \cdot r^3}{24\pi \cdot E \cdot J} = 0,041 \text{ m}$$

Úloha č. 21

Vypočítajte maximálny ohybový moment v slabo zakrivenom prúte na obr. 33, ak je dané: $F = 10000 \text{ N}$ a $r = 2 \text{ m}$.



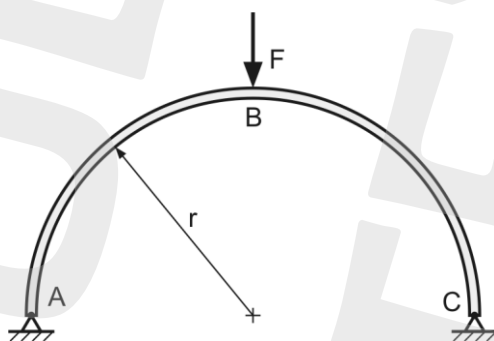
Obr. 33 Staticky neurčitý zakrivený prút zaťažný silou F

Kontrolný výsledok:

$$M_{Omax} = |M_B| = |-7260| = 7260 \text{ Nm}$$

Úloha č. 22

Vypočítajte vnútorné silové veličiny a zvislé posunutie bodu B , ak je dané: $F = 5000 \text{ N}$, $r = 2 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $J = 0,000002 \text{ m}^4$.



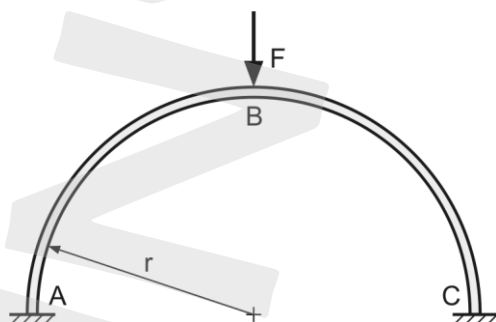
Obr. 34 Staticky neurčitý zakrivený prút zaťažný zvislou silou F

Kontrolný výsledok:

$$y_B^F = \frac{(3\pi^2 - 8\pi - 4) \cdot F \cdot r^3}{8\pi \cdot E \cdot J} = 0,0018 \text{ m}$$

Úloha č. 23

Na zakrivenom nosníku vypočítajte vnútorné silové veličiny (normálové a priečne sily, ohybové momenty) a zvislé posunutie bodu B ak je dané: $F = 15000 \text{ N}$, $r = 2 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $J = 0,000003 \text{ m}^4$.



Obr. 35 Trikrát staticky neurčitý zakrivený nosník zaťažený silou F

Kontrolné výsledky:

Ohybové momenty v bodoch A a C :

$$M_A = M_C = 3330 \text{ Nm}$$

Zvislé posunutie bodu B :

$$y_B^F = \frac{(\pi^3 - 20\pi + 32) \cdot F \cdot r^3}{8 \cdot (\pi^2 - 8) \cdot E \cdot J} = 0,0022 \text{ m}$$